

Zur Formulierung der Hypothese von der elastischen Formänderungsenergiedichte mit einer Erweiterung auf den elastisch-plastischen Bereich

J. BETTEN

Institut für Werkstoffkunde der RWTH Aachen

(Z. Naturforsch. 28a, 35–37 [1973]; eingegangen 14. Oktober 1972)

Formulation of the elastic strain energy theory with an enlargement to the elastic-plastic range

Contrary to the MISES' theory, the effort of materials under load is discussed in this paper on the base of the elastic potential. This leads to the elastic strain energy theory due to BELTRAMI. This theory is only true for the elastic case. For $\nu = 1/2$ we obtain the MISES' theory, and by changing ν to ν_{ep} it is possible to enlarge the elastic strain energy theory to the elastic-plastic deformation.

ν_{ep} is the ratio between transverse and longitudinal elastic-plastic strain, and ν is the POISSON's ratio.

Im allgemeinen liegt im Werkstoff (Kontinuum) ein mehrachsiger oder räumlicher Spannungszustand vor, der sich infolge äußerer Belastungen oder/und vorge-schriebener Randverformungen einstellt. Dieser allge-meine Spannungszustand ist gekennzeichnet durch die Koordinaten des Spannungstensors σ_{ij} .

Werkstoffkennwerte (mechanische Eigenschaften) für räumliche Spannungszustände sind nur schwer zu ermitteln und liegen daher kaum vor. Vielmehr ermit-telt man derartige Vergleichs- oder Kennwerte ein-facher und meist auch exakter in genormten Versuchen bei einachsigem Spannungszustand, sog. *einachsigen Grundversuchen*. Man ist somit gezwungen, den tat-sächlichen Spannungszustand auf einen einachsigen (fiktiven) Vergleichsspannungszustand äquivalenter Anstrengung zurückzuführen. Das führt auf den Be-griff *Vergleichsspannung* (σ), an der die Werstoffan-strengung gemessen wird.

Elastisches Potential und Werkstoffanstrengung

Die Verknüpfung mehrachsiger Spannungszustände mit dem einachsigen Spannungsstand gleicher Werk-stoffanstrengung erfolgt analytisch durch die Funktion

$$\sigma = \sigma(\sigma_{ij}), \quad (1)$$

deren Form durch die Erfahrung und durch rein theo-retische Überlegungen (*Anstrengungshypothesen*) be-stimmt werden kann.

Reprint requests to Priv.-Doz.Dr.-Ing. J. BETTEN, In-stitut für Werkstoffkunde der Techn. Hochschule Aachen, D-5100 Aachen.

¹ R. v. MISES, Nachrichten d. Kgl. Gesellsch. d. Wissen-sch., Göttingen, Math. phys. Klasse 1913, S. 582; Z. an-gew. Math. u. Mech. 8, 161 [1928].

Der wohl größte Anwendungs- und Gültigkeitsbe-reich kann einer Anstrengungshypothese zugesprochen werden, die formal mit der Theorie des *plastischen Potentials* nach MISES¹ identisch ist. Wie in² gezeigt, kann der Mises'sche Ansatz nicht nur getrennt für die elastisch und plastischen Anteile, sondern sogar für die elastisch-plastischen Gesamtverformungen benutzt wer-den.

Im Gegensatz zur Mises'schen Theorie soll im fol-genden das *elastische Potential*

$$II = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \quad (2)$$

zu Grunde gelegt werden, das analog dem inneren Produkt zweier Vektoren eine simultane Invariante der beiden Tensoren ε_{ij} und σ_{ij} ist (ε_{ij} Verzerrungsten-sor, σ_{ij} Spannungstensor). Die elastische Formände-rungsenergie A eines isotropen Körpers ist mit (2) be-kanntlich durch

$$A = \frac{1}{2} \int II \, dV \quad (3a)$$

ausdrückbar³, während ihre „Dichte“ Φ durch

$$\Phi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \quad (3b)$$

gegeben ist. Spaltet man die Tensoren ε_{ij} und σ_{ij} in ihre Deviatoren (ε'_{ij} , σ'_{ij}) und Kugeltensoren auf gemäß

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (4)$$

und

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (5)$$

² A. TROOST, Naturwiss. 56, 559 [1969].

³ A. DUSCHEK u. A. HOCHRAINER, Tensorrechnung in analytischer Darstellung; III. Teil: Anwendungen in Physik und Technik, 2. Aufl., Springer-Verlag, Wien 1965.



so geht das elastische Potential (2) unter Berücksichtigung des Hookeschen Gesetzes,

$$\varepsilon_{ij} = [(1 + \nu)/E] \sigma_{ij} - [\nu/E] \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (6)$$

(ν Querkontraktionszahl, E Elastizitätsmodul), über in:

$$\Pi = (1/G) J_2' + (1/K) (J_1/3)^2. \quad (7a)$$

Darin ist G der Gleitmodul, K der Kompressionsmodul, J_2' die zweite Invariante des Spannungsdeviators und J_1 die erste Invariante des Spannungstensors. Nach Gl. (7a) ist das elastische Potential zerlegbar in einen *Gestaltänderungs-* und *Volumenänderungsanteil*:

$$\Pi = \Pi' + \Pi_{\text{vol}}. \quad (7b)$$

Nach Überlegungen von BELTRAMI⁴ kann die elastische Formänderungsenergiedichte (3b) als maßgebliche Größe zur Beurteilung der Werkstoffanstrengung herangezogen werden. Somit kann als Anstrengungsbedingung auch

$$\sigma^{*2} = G\Pi \quad (8)$$

angesetzt werden, worin σ^{*2} ein Ansatzfreiwert ist, der sich für den einachsigen Vergleichszustand (Vergleichsspannung σ) aus Gl. (7a) zu

$$\sigma^{*2} = \sigma^2/2 (1 + \nu) \quad (9)$$

ergibt, so daß schließlich die Anstrengungsbedingung lautet:

$$\sigma^2 = 2(1 + \nu) J_2' + 3(1 - 2\nu) (J_1/3)^2 \quad (10a)$$

bzw.

$$\sigma^2 = (1 + \nu) \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \sigma_{kk}^2. \quad (10b)$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ geht Gl. (10b) in die Mises'sche Bedingung über.

Analog zu Gl. (7a) läßt sich das elastische Potential auch durch die zweite Invariante I_2' des Verzerrungsdeviators ε'_{ij} und durch die erste Invariante I_1 des Verzerrungstensors ε_{ij} ausdrücken:

$$\Pi = 4GI_2' + KI_1^2, \quad (11)$$

wenn man das Hookesche Gesetz in der Form

$$\sigma_{ij} = [E/(1 + \nu)] [\varepsilon_{ij} + \nu/(1 - 2\nu) \varepsilon_{kk} \delta_{ij}] \quad (12)$$

in Gl. (2) einsetzt und die Aufspaltung (4) berücksichtigt. Für den Vergleichsdehnungszustand mit

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad (13)$$

lautet das elastische Potential (11)

$$\Pi = E \varepsilon^2, \quad (14)$$

wenn man G und K durch E und ν ausdrückt. Aus dem Vergleich von Gl. (11) mit (14) erhält man schließlich die Vergleichsdehnung ε :

$$\varepsilon^2 = [1/(1 + \nu)] \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} + [1/3(1 - 2\nu)] \varepsilon_{kk}^2, \quad (15)$$

die für $\nu = \frac{1}{2}$ einen zwanglosen Übergang zur Mises'schen Theorie erlaubt.

Erweiterung auf den elastisch-plastischen Bereich

Die Ergebnisse gemäß Gl. (10) und Gl. (15) lassen sich in einfacher Weise auf den elastisch-plastischen Bereich übertragen, wie im folgenden gezeigt wird. Bei elastisch-plastischer Verformung läßt sich der Tensor ε_{ij} der Gesamtverformung in einen elastischen und plastischen Anteil zerlegen:

$$\varepsilon_{ij} = e\varepsilon_{ij} + p\varepsilon_{ij} \quad (16a)$$

bzw.

$$d\varepsilon_{ij} = de\varepsilon_{ij} + dp\varepsilon_{ij}. \quad (16b)$$

Analog zu Gl. (13) wird der Vergleichszustand bei isotroper elastisch-plastischer Verformung gekennzeichnet durch

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{ep} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{ep} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Darin ist ν_{ep} die Querkontraktionszahl bei elastisch-plastischer Verformung (im Gegensatz zur elastischen Querkontraktionszahl ν). Auf Grund der plastischen Volumenkonstanz

$$dp\varepsilon_{ii} = 0 \quad (18)$$

erhält man aus Gl. (16b) für die Volumendilatation bei elastisch-plastischer Verformung:

$$d\varepsilon_{ii} = de\varepsilon_{ii} \quad (19)$$

und aus dem Vergleichszustand (17):

$$d\varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu_{ep}) d\varepsilon. \quad (20)$$

Dem elastischen Vergleichszustand (13) mit einer elastischen Vergleichsdehnung $e\varepsilon$ ist demgegenüber eine Volumendehnung

$$de\varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu) de\varepsilon \quad (21)$$

zugeordnet, so daß man mit dem *Tangentenmodul* $T = d\sigma/d\varepsilon$ und dem Elastizitätsmodul $E = d\sigma/de\varepsilon$ schließlich aus den Gln. (19) bis (21) die Querkontraktionszahl bei elastisch-plastischer Verformung zu

$$\nu_{ep} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2\nu) T/E] \quad (22)$$

angeben kann.

⁴ E. Beltrami, Rend. Lomb. 18, 704 [1885].

Die Werkstoffanstrengung im elastisch-plastischen Bereich kann beschrieben werden, indem man in den Lösungen (10) und (15) die elastische Querszahl ν durch die elastisch-plastische Querszahl ν_{ep} gemäß Gl. (22) ersetzt. Die Ergebnisse lauten dann:

$$\sigma^2 = \frac{3}{2} [1 - \frac{1}{2}(1 - 2\nu) T/E] \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} + \frac{1}{2}(1 - 2\nu)(T/E) \sigma_{kk}^2 \quad (23a)$$

bzw.

$$\sigma^2 = \frac{3}{2} \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} - (1 - 2\nu) (J_2' - \frac{1}{2}J_1^2) T/E \quad (23b)$$

und

$$d\epsilon^2 = \frac{\frac{3}{2} d\epsilon'_{ij} d\epsilon'_{ij}}{1 - \frac{1}{2}(1 - 2\nu) T/E} + \frac{\epsilon_{kk}^2}{3(1 - 2\nu) T/E}, \quad (24)$$

die für $T = 0$ (idealplastischer Werkstoff) in die entsprechenden Beziehungen der Mises'schen Theorie übergehen und für $T = E$ (elastischer Bereich) mit den Ergebnissen gemäß Gl. (10) und Gl. (15) identisch sind.

In Gl. (23b) kann noch eine kürzere Schreibweise benutzt werden, wenn man berücksichtigt, daß

$$J_2' = \frac{1}{2} \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}\sigma_{kk}^2) \quad (25)$$

gilt, so daß damit

$$J_2' - \frac{1}{2}J_1^2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{kk}^2) = J_2 \quad (26)$$

wird. Somit kann Gl. (23b) auch in der Form

$$\sigma^2 = 3 J_2' - (1 - 2\nu) (T/E) J_2 \quad (27)$$

beschrieben werden. Darin ist J_2 die zweite Invariante des Spannungstensors σ_{ij} . Für den elastischen Bereich ($T = E$) geht Gl. (27) wegen des Zusammenhangs (26) über in:

$$\sigma^2 = J_1^2 + 2(1 + \nu) J_2, \quad (28)$$

während für idealplastischen Werkstoff ($T = 0$) wieder der Mises'sche Ansatz anfällt.

Zusammenfassung

Im Gegensatz zur Mises'schen Theorie wird im vorliegenden Aufsatz zur Beurteilung der Werkstoffanstrengung das elastische Potential zu Grunde gelegt. Das führt auf die Hypothese von der elastischen Formänderungsarbeit, die auf Beltrami zurückzuführen ist und nur für den elastischen Bereich gültig ist. Für $\nu = \frac{1}{2}$ erfolgt ein zwangloser Übergang zur Mises'schen Theorie. Durch Einführung einer elastisch-plastischen Querszahl ν_{ep} kann die Hypothese von der elastischen Formänderungsarbeit auf den elastisch-plastischen Bereich erweitert werden, wie in der Untersuchung gezeigt wird.

Non-Congruent Vaporization of Some Rare Earth Oxides

G. TREVISAN and R. DEPAUS

(Z. Naturforsch. 28a, 37—45 [1973]; received 6 October 1972)

The vaporization of lanthanum and yttrium oxides has been studied at temperatures as high as 1 900 and 2 200 °C respectively, by means of high temperature mass spectrometry.

Emphasis has been placed on the study of the phenomenon on first heating (transient stage). Both monoxide and atomic oxygen partial pressures were recorded and found to be time dependent in the transient stage and in the case of the lanthanum oxide also dependent on the initial water content of the sample. Variations of the metal to oxygen ratio in the solid and the possible vaporization reactions are discussed.

1. Introduction

Extensive and systematic investigations of the va-

porization processes of rare earth oxides have been carried out in the past years^{1, 2, 3, 4}.

From mass-spectrometric measurements, the com-

Reprint requests to Dr. G. TREVISAN, EURATOM, Petten, Niederlande.

¹ E. W. Westrum, Proc. Sci. Techn. Rare Earths, Pergamon Press 1, 310 [1964].

² D. WHITE, P. WALSH, L. AMES, and H. GOLDSTEIN,

Thermodynamic of nuclear materials, IAEA Vienna, p. 417 [1962].

³ L. AMES, P. WALSH, and D. WHITE, J. Phys. Chem. 71, 2707 [1967].

⁴ R. ACKERMANN, E. RAUH, and R. THORN, J. Chem. Phys. 40, 883 [1964].